Стохастический анализ и приложения
ЗАДАЧИ
24.10.2025

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано следующим образом: $\Omega = \{(\omega_o, \omega_1) : \omega_i \in \{-1, 0, 1\}\}$, $P(\omega_i = 0) = 1/2, P(\omega_i = \pm 1) = 1/4$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Заданы случайные переменные $X_0 = \omega_0, X_1 = \omega_0\omega_1$. Найти $P(X_1), E[X_0], \sigma(X_0), \sigma(X_1), E[X_1|X_0]$.

2. Пусть $X_1, \ldots,_n, \ldots$ независимые одинаково распределенные случайные величины, $P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = q = 1 - p$, заданные на пространстве с естественной фильтрацией $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

   - Докажите, что $M_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$ – мартингал относительно той же фильтрации.
   - Если $p = 1 = 1/2$, докажите, что S_n и $S_n^2 - n$ – мартингалы.

3. Игрок играет в азартную игру, где с равной вероятностью либо выигрывает 1 у.е. либо проигрывает 1 у.е. Игрок перестает играть либо если выигрывает a у.е. либо если проигрывает b у.е.

   - Какова вероятность, что когда игрок перестал играть, он выигрывал.
   - Каково математическое ожидание количества раундов, которые игрок должен сыграть, прежде чем остановится.
   - Напишите скрипт, который просимулирует игру и эмпирически проверит оценки из предыдущих пунктов.

4. Если в предыдущей задаче вероятности выигрыша и проигрыша не равны (выигрывает с вероятностью p и проигрывает с вероятностью q), как поменяются результаты?

5. Докажите, что если τ_1 и τ_2 - время остановки относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}, n = 1, 2, \ldots$, то $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 \vee \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ — тоже время остановки.

6. Докажите, что если τ_1 и τ_2 - время остановки относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}, t \in [0, \infty)$, то $\tau_1 + \tau_2$ — тоже время остановки.

7. Пусть X_n - Марковский процесс на двумерной целочисленной решетке (точка может принимать только целочисленные координаты). Вероятность перехода в любую соседнюю точку одинакова.

   - Докажите, что $M_n = |X_n|^2 - \frac{3}{2}n$ – мартингал относительно естественной фильтрации.
   - Определим время остановки $\tau_R = \inf\{n \geq 0, |X_n|^2 \geq R^2\}$. Найдите оценки для математического ожидания $E[\tau_R|X_0 = (0, 0)]$
   - Напишите скрипт, который просимулирует данный процесс и эмпирически проверит оценки из предыдущего пункта.