

Стохастический анализ и приложения
ЗАДАЧИ
3.10.2025

1. Монету подбрасывают 3 раза. Определите три события:

- Орел выпал на первом броске
- Орел выпал на втором броске
- Орел выпал два раза подряд

Являются ли эти события независимыми?

2. Случайные переменные $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$. Найдите распределение для $X + Y$.

3. $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимые, одинаково распределенные случайные величины. Для $k < n$ найдите

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^k X_i}{\sum_{i=1}^n X_i} \right]$$

4. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots$ задана следующий образом:

$$X_1 \sim Ber(1/2), X_{n+1} = (X_n + 1) \mod 2$$

Определите сходимость этой последовательности.

5. Дано конечное вероятностное пространство $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$, $|\Sigma| = p$, $\mathcal{F} = 2^\Sigma$, $P(A) = \frac{|A|}{p}$, где p - простое число. Докажите, что если два события A и B независимы, то хотя бы одно из них вырождено (равно $\emptyset$ или Σ).

6. Определим множество сходимости последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$ как $A = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \text{ сходится}\}$. Докажите, что $A \in \mathcal{F}$.

7. $Y \sim Unif([0, 1])$, $X_n = \frac{(-1)^n Y}{n}$. Докажите, что $\{X_n\}$ сходится почти наверняка и в L^2 .

8. Пусть $\{W_n\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $W_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. К чему сходится по распределению последовательность $X_0 = 0$,

$$X_{n+1} = \frac{X_n + W_{n+1}}{2}$$

9. Докажите, что $X_n \rightarrow X$ по вероятности тогда и только тогда, когда

$$E \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] \rightarrow 0$$

10. $X_1, X_2, \dots$ - последовательности независимых одинаково распределенных случайных переменных таких, что $P(X_n > x) = e^{-x}, x \geq 0$. Докажите, что тогда почти наверняка

$$\frac{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}}{\log n} \rightarrow 1$$