

Стохастический анализ и приложения  
ЗАДАЧИ  
31.10.2025

1. Пусть  $W_t$  - стандартный Винеровский процесс. Найти ковариацию  $E(W_t W_s)$ .
2. Пусть  $W_t$  - стандартный Винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы тоже Винеровские
  - (a)  $X_t = -W_t$
  - (b)  $X_t = W_{T-t} - W_t$ , где  $T < \infty$
  - (c)  $X_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$ , где  $c > 0$
  - (d)  $X_t = tW_{1/t}$ ,  $t > 0$ ,  $X_0 = 0$
3. Пусть  $W_t$  и  $B_t$  стандартные Винеровские процессы. Докажите, что процесс  $X_t = \frac{W_t + B_t}{\sqrt{2}}$  тоже Винеровский и найдите корреляцию между процессами  $X_t$  и  $B_t$ .
4. Пусть  $W_t$  - стандартный Винеровский процесс и  $\{\mathcal{F}_t\}$  - естественная фильтрация. Найдите  $E[W_t^4 | \mathcal{F}_s]$  для  $t > s > 0$ .
5. Пусть  $W_t$  - стандартный Винеровский процесс. Зададим новый процесс  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$ . Покажите, что  $P[M_t \geq m] = 2P[W_t \geq m]$ .
6. Пусть  $W_t$  - стандартный Винеровский процесс. Зададим новый процесс  $L = \sup\{0 \leq s \leq 1 : W_s = 0\}$ . Покажите, что  $P[L \leq s] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{s}$ .